**Chapitre 5 – Application de la réduction des endomorphismes et des matrices**

**Systèmes récurrents linéaires**

**Exponentielle d’endomorphisme et de matrices**

1. Suites et séries de matrices

Définition : Pour une matrice , notons le coefficient d’indice de la matrice . Soit une suite d’éléments de . On dit que la suite converge vers la matrice si , la suite scalaire

converge vers

Pour , on note

Alors on a ,

Alors on a ,

A partir de cet encadrement :

Propriété : Soient une suite d’éléments de et .

On a équivalence entre :

1. La suite matricielle converge vers

Définition : Soit une suite d’éléments de . On définit la série de terme général la suite matricielle où

On la note ou .

On dit que la série converge si la suite converge vers une matrice . La matrice S estalors appelé somme de la série et notée :

Propriété : Soient une suite d’éléments de Si la série numérique converge, alors la série matricielle converge également. On dit que la série est absolument convergente.

Lemme : Soient , alors . Par récurrence, on en déduit :

Théorème : Soit . La série matricielle Converge absolument.

1. **Exponentielle de matrices**

Définition : Soit . On définit l’exponentielle de , notée ou par :

Propriété : Soient telles que alors

Démonstration : On utilise le binôme de Newton pour séparer, puis le produit de Cauchy pour rassembler.

Propriété : Soit . La matrice est inversible, d’inverse

Démonstration : et commutent, donc

Propriété : Soient et Alors

Démonstration : On a

Car

Définition : Soient et ,

Soit . On dit que est dérivable en si , la fonction est dérivable en .

On note alors

On dit que est dérivable sur si est dérivable en tout point de .

Propriété : Soient , et . Si et sont dérivables, alors l’est aussi sur , et

Propriété : Soient et , . Si et sont dérivables sur , alors aussi et

Théorème : Soit La fonction , est dérivable sur et

1. **Exponentielle d’endomorphisme**

Propriété : Soient deux matrices semblables, alors et sont aussi semblables.

Définition : Soit un -ev de dimension finie et $. Soit une base de et . On définit l’exponentielle de , notée , comme l’unique endomorphisme de dont la matrice dans est

Propriété : Soient tels que , alors

**III) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants**

1. **Systèmes différentiels linéaires homogènes**

On s’intéresse à des systèmes d’équations différentielles linéaires de la forme suivante :

Avec ,

Et d’inconnues   dérivables

Soient dérivables. Posons définie par

Alors la fonction est dérivable sur et on a l’équivalence :

sont solutions de

, où

Théorème : Soit dérivable sur et . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. tel que
2. ,

Corollaire : Soient , et . Il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant :

Démonstration :

1. **Systèmes différentiels linéaires non homogènes**

Dans cette partie, on s’intéresse aux systèmes du type :

Où et d’inconnue dérivable.

Notons le système homogène associé.

Théorème : Soit une solution particulière de : et

dérivable. On a l’équivalence :

Où est une solution particulière de .

Remarque : Si a une expression particulière, par ex est une fonction polynomiale, ou et tq

ou s’écrit à l’aide de cos ou sin

On essaie alors de chercher une solution particulière de sous la même forme que .

Sinon, on commence par résoudre le système homogène associé à .

Puis on utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution de la forme , où , dérivable sur .

Alors est dérivable sur , et

Ainsi, est solution de

Si on rajoute l’hypothèse que est continue sur on doit prendre une primitive de chaque pour obtenir une solution particulière de .